

enseñarles a que " La música es el arte más directo, entra por el oído y va al corazón" (Magdalena Martínez (1963) Flautista española).

Como conclusión, debemos de darle la importancia y el valor que tiene esta materia e impedir que el día de mañana desaparezca de las aulas, ya que hoy en día, la reducción a una hora a la semana de Educación Musical, empieza a ser preocupante y me atrevería a decir que vergonzoso. ●

## Diseño de una Unidad Didáctica: “Trigonometría Plana”

**Título:** Diseño de una Unidad Didáctica: "Trigonometría Plana". **Target:** " 4º de ESO". **Asignatura:** "Matemáticas".  
**Autor:** Rosa Belén Ariza Serrano, "Licenciada en Matemáticas", "Profesora de Matemáticas en Educación Secundaria".

Esta unidad didáctica está planteada para alumnos de 4º de ESO “Opción B”. Durante 8 clases, vamos a desarrollar la teoría de la trigonometría plana, con el objetivo principal del conocimiento de las razones trigonométricas de un ángulo y las propiedades elementales, así como la utilidad en la resolución de problemas donde se manifiestan.

De los objetivos marcados por el BOE los objetivos que considero para esta unidad son:

- 1.- Utilizar el conocimiento matemático para organizar, interpretar e intervenir en situaciones de "la realidad".
- 2.- Comprender e interpretar distintas formas de expresión matemática e incorporarla al lenguaje habitual.
- 3.- Reconocer y plantear situaciones en las que existan problemas susceptibles de ser formulados en términos matemáticos, resolverlos y analizar los resultados utilizando los recursos apropiados.
- 4.- Reflexionar sobre las propias estrategias utilizadas en las actividades matemáticas.

Para ello se suponen conocidos:

- Teorema de Pitágoras
- Semejanza: triángulos semejantes y criterios de semejanza.

## 1ª CLASE

Esta primera hora de clase tiene como principal objetivo introducirlos en el campo de la trigonometría, motivándolos para su estudio. También se repasarán algunos conceptos necesarios para poder desarrollar este tema.

### 1ª ACTIVIDAD

Objetivo: Motivar a los alumnos para el estudio de la trigonometría, sirve como ejercicio introductorio.

Tiempo empleado: 15 minutos.

Forma de agrupación: Por parejas y después gran grupo.

Material didáctico: Proyector, transparencia y una fotocopia para cada pareja.

Desarrollo: Se agrupan los alumnos por parejas y se les entrega el siguiente ejercicio en fotocopias:

Benito y Cecilio son dos amigos que han ido a medir la distancia desde la cima de una montaña hasta el río que pasa junto a ella. Como ellos sabían que el río lo cruzaba un puente que tenía una altura de 37 m., sólo necesitaban conocer la distancia que había entre la cima del monte y el puente. Pero cuando llegaron, se dieron cuenta que éste se había roto. Para resolver el problema, Benito dio un rodeo y subió a la montaña; desde allí lanzó una cuerda de 52 m. que Cecilio cogió y estiró hasta que quedara tensa, y entonces la ató al suelo. Si el ángulo que formaba la cuerda con la vertical era de  $42^\circ$ , ¿Qué distancia había del pico al puente? ¿Cuál era la altura total de la montaña?



Pone el mismo ejercicio en una transparencia y les da 5 minutos para que intenten resolverlo y analizarlo.

Cuando termina el tiempo se comenta en gran grupo los resultados obtenidos. Si alguien da una solución se analiza.

El profesor hace énfasis en la realidad del problema y en su aplicación en la vida cotidiana.

El problema queda abierto. El primero que, a lo largo de la teoría crea que conoce el método para resolverlo lo dirá, se parará la clase y lo hará. El alumno tendrá un punto positivo para la evaluación.

Justificaciones: Me parece un ejercicio adecuado para motivarlos porque es un problema que se puede encontrar en la vida real. Al dejarlo sin resolver pueden intrigarse y cuando lo resuelva verán la importancia de la trigonometría.

## 2ª ACTIVIDAD

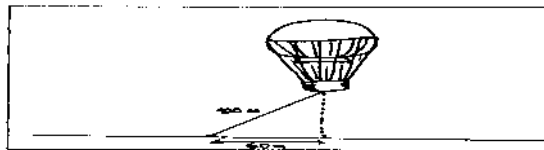
Objetivo: Repaso del teorema de Pitágoras.

Tiempo empleado: 10 minutos

Forma de agrupación: Individual

Material didáctico: Cuaderno y pizarra

Desarrollo: Se les plantea el ejercicio:



Un globo cautivo se sujeta al suelo por un cable de 100 m de largo. Si el viento lo ha alejado 60 m de la vertical sobre el amarre, ¿a qué altura se encuentra el globo?

Tienen 5 minutos para resolverlo y después saldrá un voluntario para hacerlo en la pizarra y explicará el razonamiento seguido, planteando la generalización del teorema de Pitágoras.

El profesor señalará la semejanza con el problema anterior.

Justificación: Una buena manera para recordar el teorema de Pitágoras es viendo su aplicación en los problemas. Así son ellos los que tienen que recordar cómo era y cómo se aplicaba. Además se trata de un ejercicio como el anterior, que puede aparecer en la vida real y esto es importante para ver la importancia del teorema de Pitágoras.

## 3ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que reflexionen acerca de lo que es un ángulo, la definición de grado y cómo se mide.

Tiempo empleado: 10 minutos

Forma de agrupación: Grupos de cuatro.

Material didáctico: Cuaderno, regla y transportador de ángulos.

Desarrollo: Cada grupo tiene que pensar una definición de ángulo, poner ejemplos y ver cómo se miden. En el cuaderno pintan distintos ángulos, con la regla y medirlos y entre todos llegar a una definición de ángulo.

Justificación: Entre todos pueden llegar mejor a una definición de ángulo y a resolver el resto de cuestiones que se les presentan que si lo hacen solos. Además, siendo ellos los que la buscan y

estudian, están realizando un aprendizaje activo, que los motivará más y ayudará a que comprendan mejor la definición.

#### 4ª ACTIVIDAD

**Objetivo:** Que conozcan la definición de ángulo y grado. Cómo se miden y las diferentes formas de expresar su valor. También cómo se introducen en la calculadora y cómo pasar de una expresión a otra.

**Tiempo empleado:** 20 minutos.

**Forma de agrupación:** Gran grupo.

**Material didáctico:** Pizarra, transportador de ángulos para la pizarra y calculadora.

**Desarrollo:** Cada grupo va diciendo la definición que han dado de ángulo y el profesor la escribe en la pizarra. Entre todos se eligen las que son más válidas. Finalmente el profesor lee una que aparezca en un libro de texto.

Uno de los grupos sale voluntario a la pizarra para decir cómo se miden los ángulos. Se comentan los resultados del resto de los grupos.

Con esto habrá salido la palabra "grado". El profesor pregunta qué es un grado y si no lo saben les da la definición. Aparecen así grados, minutos y segundos.

Explica dos formas de expresar el valor de un ángulo: En forma decimal y en forma compleja. La forma de expresarlos en la calculadora y como pasar de una expresión a otra.

**Justificación:** Con este ejercicio cada alumno reconoce los errores y aciertos propios y de los demás, creando así una mente abierta, creativa y crítica. Acabamos explicando la definición a partir de sus pensamientos.

#### 5ª ACTIVIDAD

**Objetivo:** Que lleguen a asimilar mejor los conceptos dados en la actividad anterior mediante la ejercitación.

**Tiempo empleado:** 5 minutos

**Forma de agrupación:** Individual

**Material didáctico:** Fotocopias

**Desarrollo:** Se les da una fotocopia con los siguientes ejercicios, para hacer en casa y se corregirán el próximo día.

**Ejercicios con ángulos:**

1º A partir de un ángulo recto dibuja, de forma aproximada, ángulos de:  $45^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $180^\circ$  y  $100^\circ$ .

2º Dados los ángulos  $\alpha = 34,25^\circ$ ,  $\beta = 354,29'$  y  $\delta = -5467,45''$ , transfórmalos en forma compleja utilizando la calculadora.

3º Dados los ángulos  $\alpha = 56^\circ 34'$  y  $\beta = -23^\circ 25' 12''$ , transfórmalos en forma decimal, expresándolos como grados, como minutos y como segundos.

4º Utilizando los ángulos del ejercicio anterior calcula:  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha - \beta$ ,  $3\alpha$ ,  $\frac{\alpha}{3}$

Comprueba los resultados obtenidos con la calculadora.

5º Dibuja un triángulo, con el transportador de ángulos mide cada uno de sus ángulos y súmalos, ¿qué verifican? Construye otro triángulo con esos mismos ángulos pero con lados diferentes ¿qué verifican?

6º Busca la definición de trigonometría.

Justificación: A partir de un conjunto de ejercicios prácticos asimilan mejor la teoría. También, cuando se ponen a resolver los ejercicios es cuando les aparecerán las dudas y en la próxima clase se las podrá responder el profesor.

## 2ª CLASE

Durante esta hora los alumnos van a tener un primer contacto con la trigonometría para que conozcan su significado y origen. Se recordará un concepto necesario para introducirse en la trigonometría, como es la semejanza. Pero antes, se comenzará corrigiendo los ejercicios que quedaron pendientes del día anterior.

### 1ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que comprueben si han hecho correctamente los ejercicios mandados el día anterior y si han tenido alguna duda durante su realización, plantearla y resolverla.

Tiempo empleado: 15 minutos

Forma de agrupación: Gran grupo

Material didáctico: Pizarra

Desarrollo: Van saliendo voluntarios a resolver cada uno de los ejercicios en la pizarra y se van contestando las dudas que van surgiendo.

Justificación: Así ven si han hecho bien los ejercicios, y si tienen alguna duda.

## 2ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que conozcan el significado de trigonometría así como su origen, para que valoren su importancia.

Tiempo empleado: 15 minutos

Forma de agrupación: Gran grupo

Material didáctico: Cuaderno y pizarra.

Desarrollo: Cada uno lee la definición que ha encontrado de trigonometría (probablemente habrá muchas repetidas, así que no todos tendrán que leer la suya) y se hace una interpretación de las diferentes definiciones.

Posteriormente explica la descomposición del término trigonometría (si no ha salido ya con alguna de las definiciones) TRI (tres) - GONON (ángulo) - METRÍA (medida). También les habla algo del origen de la trigonometría así como sus aplicaciones en la actualidad.

Justificación: Una manera de comenzar la trigonometría es saber cuál es su definición y de dónde procede.

## 3ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que recuerden el concepto de semejanza, triángulo semejante, triángulo recto semejante y las relaciones de semejanza mediante la manipulación.

Tiempo empleado: 15 minutos

Forma de agrupación: Grupos de cuatro.

Material didáctico: Cuaderno y ciertas figuras planas, en las que hay polígonos, triángulos rectángulos, dichas figuras guardan relación de semejanza y otras no. Las figuras tienen marcado lo que miden sus lados y sus ángulos.

Desarrollo: Se reparte el material y se les pide que busquen figuras semejantes y analicen que propiedades verifican sus ángulos y sus lados, que busquen una generalización. También tienen que estudiar que es lo que ocurre con los triángulos rectángulos semejantes.

Justificación: Al estar trabajando con un material manipulativo pueden ver mejor la semejanza y sus propiedades, ya que en las figuras están marcados los ángulos y los lados, con lo que no se tienen que entretener en medirlos. Al estar en grupos de cuatro se favorece la comunicación entre ellos y se ayudan para obtener las propiedades.

#### 4ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que conozcan la definición de figura plana semejante, las propiedades y principalmente de triángulo rectángulo semejante.

Tiempo empleado: 15 minutos

Forma de agrupación: Gran grupo

Material didáctico: Conjunto de figuras de ejercicio anterior y la pizarra.

Desarrollo: Se trata de una puesta en común de la actividad anterior. Cada grupo va mostrando un ejemplo de figura semejante. Entre todos se debaten las propiedades de semejanza así como su definición. Hacemos énfasis en el triángulo rectángulo que es el que vamos a necesitar. El profesor les lee la definición que aparece en un libro de texto de semejanza y la caracterización de triángulo rectángulo semejante: " Dos triángulos rectángulos son semejantes si y sólo si, tienen un ángulo agudo en común". Les pinta un ejemplo en la pizarra.

Justificación: Mediante la puesta en común se comparten las ideas del resto de los compañeros. Así conocen el trabajo que los demás grupos han realizado. También con el debate se fomenta la actitud crítica.

#### 3ª CLASE

##### 1ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que conozcan las razones trigonométricas y de donde proceden.

Tiempo empleado: 15 minutos

Forma de agrupación: Gran grupo

Material didáctico: Pizarra y calculadora.

Desarrollo: Recordamos la caracterización de triángulos rectángulos semejantes y pintamos unos en la pizarra. Les ponemos nombres a cada uno de los vértices y aplicamos las razones de semejanza.

Sólo dependen del ángulo  $\alpha$  y por eso podemos definir las razones trigonométricas que sólo dependen del ángulo:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{cateto contiguo a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto contiguo a } \alpha}$$

A continuación les explico cómo funciona la calculadora científica. Hay que asegurarse de que todos los alumnos la tienen trabajando en grados. Tienen que realizar diversos ejemplos y calcular las tres razones trigonométricas de algunos ángulos significativos:  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ .

Justificación: Al introducirle las razones trigonométricas con el triángulo rectángulo semejante, ven mejor que sólo dependen del ángulo, y comprenden mejor las definiciones que si le das directamente a partir de los cocientes. Además me parece un buen momento para enseñarles a trabajar con la calculadora, ya que la calculadora es un material muy práctico en trigonometría.

## 2ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que estudien algunas propiedades de las razones trigonométricas.

Tiempo empleado: 15 minutos

Forma de agrupación: Grupos de cuatro.

Material didáctico: Cuaderno y calculadora.

Desarrollo: A cada grupo se les plantea una de las cuestiones siguientes:

- ¿Entre qué valores está comprendido el seno, coseno y tangente de un ángulo? ¿Por qué?
- ¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas de  $\alpha$  y  $90-\alpha$ ? ¿Por qué?
- ¿Qué relación tienen el seno y el coseno con la tangente? ¿Por qué?
- ¿Qué relación existe entre los cuadrados del seno y el coseno? ¿Por qué?

Para hacer estos ejercicios disponen de la calculadora, para hacer pruebas con distintos ángulos, y las definiciones de las razones trigonométricas.

Justificación: Siendo ellos los que obtienen las propiedades las aprenden mejor, y ven que no es un hecho ni ninguna reglilla que les da el profesor, sino que tiene una demostración que ellos mismos intentan buscar.

## 3ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que todos los alumnos conozcan las propiedades obtenidas por el resto y vean que las suyas están bien.

Tiempo empleado: 15 minutos

Forma de agrupación: Gran grupo

Material didáctico: Pizarra y calculadora.

Desarrollo: Se divide la pizarra en tantas partes como grupos (suponemos que hay dos pizarras). Un representante de cada grupo sale y en su trozo de pizarra escribe la propiedad que han descubierto. Después se analizan, una por una, entre todos, haciendo comprobaciones con la calculadora y se explica el por qué de esa propiedad (que básicamente corresponde con la demostración).



Si hay dos grupos que tengan la misma cuestión, ambos comentan los resultados obtenidos y se comparan.

Justificación: Al ser una puesta en común contiene todas las ventajas descritas ya en las otras justificaciones de las anteriores puestas en común. Además, el hecho de que sean ellos mismos los que expliquen a sus compañeros las propiedades les hace esforzarse en la expresión, para que los demás puedan entenderlo.

#### 4ª CLASE

En esta clase pretendemos que los alumnos capten el carácter práctico de la trigonometría a partir de dar solución a problemas de la vida cotidiana. Primeramente se harán unos ejercicios de resolución de triángulos rectángulos para facilitar la realización de los problemas posteriores.

##### 1ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que aprendan a resolver los problemas de resolución de triángulos rectángulos, además de por la importancia que tiene este tipo de ejercicios en si mismos, para facilitarles la ejecución de los problemas posteriores que están basados en situaciones reales.

Tiempo empleado: 20 minutos

Forma de agrupación: Por parejas y al final gran grupo.

Material didáctico: Cuaderno, pizarra y calculadora.

Desarrollo: Se les reparte una fotocopia a cada alumno (aunque el trabajo sea por parejas, así cada uno se puede llevar una copia a su casa) con los siguientes ejercicios:

1º Determinar la hipotenusa y los ángulos de un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 7 y 2 cm.

2º La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 15 cm y uno de sus ángulos mide  $50^\circ 45'$ . Halla los demás elementos del triángulo.

Mientras que los alumnos intentan hacer los ejercicios, el profesor se da paseos por la clase para ayudar a las parejas que se encuentren un poco más atascadas. Si ve que a la clase le cuesta trabajo resolver el ejercicio va dando pistas en la pizarra: pinta el dibujo, dice que se puede aplicar el teorema de Pitágoras, recuerda la definición de seno, coseno y tangente... Después de 15 minutos sale una pareja a resolver el ejercicio en la pizarra, un ejercicio cada miembro de la pareja. Los alumnos preguntan sus dudas y el profesor les da respuesta.

Justificación: Al trabajar por parejas se pueden ayudar, ya que se trata de un ejercicio nuevo para ellos. Es una actividad un tanto investigadora, es la primera vez que ponen en práctica las definiciones de las razones trigonométricas, y para hacer este ejercicio no solo hay que sabérselas sino comprenderlas.

## 2ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que resuelvan un primer problema que puede aparecer en la vida cotidiana, con lo que además de ver su carácter práctico empiezan a trabajar con las razones trigonométricas en la resolución de triángulos.

Tiempo empleado: 10 minutos

Forma de agrupación: Gran grupo

Material didáctico: Pizarra y calculadora.

Desarrollo: Se les plantea el siguiente ejercicio:

Se quiere medir la altura de un edificio, pero es imposible subirse a la última planta para conocer la altura de ésta, y por tanto la del edificio. Se sabe que en un momento determinado, el edificio proyecta una sombra de 20 metros de largo. El ángulo que se forma desde el extremo de la sombra hasta el punto más alto del edificio es de  $69^\circ$ , ¿cuál es la altura del edificio?

Sale un alumno a la pizarra y entre todos van diciendo lo que creen que hay que hacer para resolverlo hasta que se llega a la solución. El profesor hace notar que este problema se lo podría encontrar un albañil en su trabajo, tiene bastante relación con la vida real. También destaca el hecho de que para poder hacer este tipo de ejercicios es necesario saber medir ángulos, y por eso se desarrolla la actividad que viene a continuación.

Justificación: Al resolver el problema entre todos se pueden aportar muchas ideas. Se complementan las ideas de unos alumnos y de otros. Al ser un problema de la vida cotidiana les señalamos a los alumnos la importancia de la trigonometría.

## 3ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que realicen problemas de trigonometría para afianzar conceptos y aprendan a aplicar la trigonometría a la vida cotidiana.

Tiempo empleado: 10 minutos.

Forma de agrupación: Individual.

Material didáctico: Cuaderno y fotocopias.

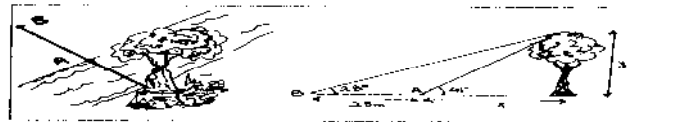
Desarrollo: Se le reparte una fotocopia a cada alumno con la siguiente lista de problemas:

1º Con la ayuda de la calculadora, resuelve el triángulo rectángulo ABC, es decir, calcula sus tres ángulos (donde  $A = 90^\circ$ ) y sus tres lados, sabiendo que  $a = 10\text{cm}$  y  $\cos B = 1/4$ .

2º Con la ayuda de la calculadora, resuelve el triángulo rectángulo ABC, es decir, calcula sus tres ángulos (donde  $A = 90^\circ$ ) y sus tres lados, sabiendo que  $a = 10$  cm y  $\operatorname{tg} C = 3$ .

3º Una cometa está unida al suelo por una cuerda de 200 m, que forma con el suelo un ángulo de  $60^\circ$ . Suponiendo que la cuerda está tirante, averigua a qué altura se encuentra la cometa.

4º Para calcular la anchura de un río que no podemos atravesar y la altura de un árbol situado en la otra orilla, hemos realizado las mediciones que se indican en la ilustración. Calcular dichas distancias.



5º Se desea hallar la altura del pilar que debe sostener un puente de 30m de longitud, diseñado para salvar el barranco de la figura. Así mismo, interesa determinar la distancia de los extremos del puente al punto de apoyo del pilar. Sabiendo que los ángulos que forma el puente son de  $\alpha = 42^\circ 35'$  y  $\beta = 38^\circ 45'$  calcula los datos que se desean obtener.

Una vez que el profesor reparte las fotocopias da algunas ideas de cómo resolver los problemas.

Justificación: Al realizar varios ejercicios se asimilan mejor los conceptos. También ven distintas situaciones que se resuelven aplicando la trigonometría.

#### 4ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que conozcan un material que se usa para medir ángulos, aparte del transportador de ángulos, y que es muy usado por distintos profesionales.

Tiempo empleado: 20 minutos

Forma de agrupación: Gran grupo y después grupos de 5.

Material didáctico: Pizarra y calculadora y teodolitos y metros.

Desarrollo: El profesor lleva a clase varios teodolitos y los reparte entre los grupos así como los metros. Explica para qué sirven, de qué partes están constituidos y como se usan.

Una vez terminada la explicación les plantea la siguiente actividad:

Vamos a salir al patio y vamos a medir la altura del instituto. Para ello tenéis cada grupo un teodolito y un metro. Durante el rato de clase que queda tomáis las mediciones que necesitéis y para mañana me traéis los cálculos de la altura del edificio.

Así que el profesor va con los alumnos al patio y los va ayudando para tomar las mediciones con el teodolito.

Justificación: Es una actividad nueva para ellos y creo que motivadora, porque no sólo conocen un nuevo material para medir ángulos, sino que están realmente resolviendo un problema con la trigonometría. No es lo mismo encontrarte el enunciado de un problema en un papel, por muy real que parezca, que tener el problema real al que vas a conseguir darle solución. Creo que puede ser una actividad bastante motivadora.

## 5ª CLASE

En esta clase se va a introducir por primera vez el concepto de radián y se va a tratar el estudio de las razones trigonométricas en la circunferencia radio 1, de un ángulo cualquiera. Antes se van a corregir los problemas mandados en la clase anterior.

### 1ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que comprueben si han realizado bien los ejercicios mandados el día anterior y pregunten las dudas que les han surgido.

Tiempo empleado: 20 minutos.

Forma de agrupación: Gran grupo.

Material didáctico: Pizarra y calculadora.

Desarrollo: Van saliendo voluntarios a la pizarra para resolver los ejercicios y plantean sus dudas al profesor.

Justificación: Así ven si han hecho bien los ejercicios, y si tienen alguna duda, no se les queda almacenada sino que tienen opción de comentarla y así poder solventarla.

### 2ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que aprendan concepto de radián así como el paso de grados a radianes.

Tiempo empleado: 15 minutos.

Forma de agrupación: Grupos de cuatro.

Material didáctico: Pizarra y calculadora.

Desarrollo: Se les pide que alguno recuerde la definición de grado. Se les anuncia que hay otra unidad para medir los ángulos y se les explica el concepto de radián.

Se llama radián al ángulo determinado por un arco de circunferencia cuya longitud coincide con el radio.

Se les pide a cada grupo que a partir de la definición de radián y teniendo en cuenta que la longitud de la circunferencia es  $2\pi r$  con  $r$ =radio de la circunferencia, determinar la equivalencia existente entre grados y radianes, señalando cuántos radianes son  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $240^\circ$  y  $360^\circ$ .

Después se realiza una pequeña puesta en común en la que cada grupo expone las conclusiones llegadas.

Justificación: Al ser ellos los que investigan en la relación entre grado y radián afianzan el concepto de radián y conocerán mejor esta relación.

### 3ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que conozcan lo que es la circunferencia goniométrica y la relación que tienen las razones trigonométricas en un punto con las coordenadas de dicho punto.

Tiempo empleado: 20 minutos.

Forma de agrupación: Gran grupo.

Material didáctico: Pizarra y calculadora.

Desarrollo: El profesor explica lo que es una circunferencia goniométrica y la relación de la posición de un punto móvil sobre la circunferencia con las razones trigonométricas.

Así se extienden las definiciones de las razones trigonométricas a cualquier ángulo y se hace notar que pueden ser positivas o negativas, y que además existen muchos ángulos diferentes con las mismas razones como  $0^\circ$ ,  $360^\circ$ ,  $720^\circ$ ,  $-360^\circ$ . Se explican cómo se calculan las razones trigonométricas de cualquier ángulo.

El profesor les enseñará los diagramas referentes a los signos del seno y del coseno y les hará reflexionar.

Justificación: Como se trata de una teoría un poco más compleja parece adecuado que la explique el profesor directamente y después los alumnos la pondrán en práctica en los ejercicios de la actividad siguiente.

### 4ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que ejerciten los conocimientos adquiridos durante esta clase para afianzar los conceptos.

Tiempo empleado: 5 minutos.

Forma de agrupación: Gran grupo.

Material didáctico: Fotocopias.

Desarrollo: Se le reparte una fotocopia a cada alumno con la siguiente relación de ejercicios y se les dice que los traigan hechos para la siguiente clase:

1º Convierte en radianes los ángulos: a)  $34^\circ$ ; b)  $54^\circ 34' 45''$ ; c)  $3456'$ ; d)  $35600''$

2º Convierte en forma compleja sexagesimal los ángulos: a)  $4\pi/5$  rad; b)  $7\pi/3$  rad; c)  $3,25$  rad; d)  $0,001$  rad

3º Sitúa sobre la circunferencia goniométrica los ángulos  $150^\circ$ ,  $210^\circ$ ,  $-120^\circ$ ,  $7\pi/6$  y  $-4\pi/3$ , y determina sus razones trigonométricas.

4º Concierte en radianes los ángulos de  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ . Haz una tabla de los 5 ángulos.

5º Determina un ángulo  $\alpha$  sabiendo que  $\operatorname{tg} \alpha = 1,5$  y  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

6º Determinar el signo de la tangente en cada cuadrante.

7º Discutir en que cuadrante puede estar el ángulo  $\alpha$  en cada caso, sabiendo que:

a)  $\operatorname{Sen} \alpha = 1/2$  y  $\operatorname{Cos} \alpha > 0$ ; b)  $\operatorname{Sen} \alpha = 0$  y  $\operatorname{Cos} \alpha = 1$ ; c)  $\operatorname{Cos} \alpha = -0,81$  y  $\operatorname{Sen} \alpha > 1$

8º Halla las razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$  en cada caso:

a)  $\operatorname{Sen} \alpha = 2/3$ ; b)  $\operatorname{Cos} \alpha = 1/2$  y  $\alpha$  está en el 4º cuadrante; c)  $\operatorname{Tg} \alpha = 2$

Justificación: Para los alumnos, el clasificar los ángulos por el signo de las razones trigonométricas así como las conclusiones que se obtienen a partir de la trigonometría en la circunferencia goniométrica son difíciles de asimilar, con lo que es mejor que realicen una lista amplia y variada de ejercicios.

## 6ª CLASE

Durante esta clase se van a ver las funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente. Se van a analizar distintas propiedades de estas funciones. Pero previamente se van a corregir los ejercicios mandados el día anterior.

### 1ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que comprueben si han realizado bien los ejercicios mandados el día anterior y pregunten las dudas.

Tiempo empleado: 20 minutos.

Forma de agrupación: Gran grupo.

Material didáctico: Pizarra.

Desarrollo: Van saliendo voluntarios a la pizarra para resolver los ejercicios. Los alumnos van planteando sus dudas y el profesor las va respondiendo.

Justificación: Así ven si han hecho bien los ejercicios, y si tienen alguna duda, no se les queda almacenada sino que tienen opción de comentarla y así poder solventarla.

## 2ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que conozcan las funciones  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  y sepan cuál es su gráfica y algunas de sus propiedades.

Tiempo empleado: 15 minutos.

Forma de agrupación: Gran grupo.

Material didáctico: Pizarra.

Desarrollo: El Profesor presenta las funciones  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ . Les pinta la representación gráfica en la pizarra. Entre todos van analizando las propiedades de: dominio, recorrido, periodicidad, monotonía. Ven la relación que existe entre la función seno y coseno a partir de la traslación del vector de traslación  $(0, \pi/2)$ .

Justificación: Como introducción a las funciones trigonométricas veo mejor que el estudio se haga en gran grupo. En la siguiente actividad, con estos conceptos previos, pasarán ellos a analizar la función tangente.

## 3ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que conozcan la función  $y = \tan x$ . Que sepan cuál es su gráfica y algunas de sus propiedades como rango, recorrido, crecimiento y decrecimiento.

Tiempo empleado: 20 minutos.

Forma de agrupación: Por parejas y después gran grupo.

Material didáctico: Pizarra, cuaderno y calculadora.

Desarrollo: Cada pareja tiene que representar la función tangente y analizar sus propiedades como se ha hecho en la actividad anterior con el seno y el coseno.

El profesor les aconseja que para representar la gráfica tomen la imagen de algunos puntos señalados como  $0, \pi/4, \pi/2, -\pi/4...$  Para ver que ocurre con  $\pi/2$  y  $-\pi/2$ , como en la calculadora les va a poner error, les aconsejamos que prueben con valores próximos. Cuando han transcurrido unos 8 minutos sale un voluntario a la pizarra para representar la gráfica, por si hay alguna pareja que no haya sabido hacerlo, que puedan continuar con el resto de los ejercicios. Cuando queden 5 minutos se realizará una pequeña puesta en común para analizar las propiedades.

Justificación: Analizando ellos la función tangente se producen dos hechos positivos para el aprendizaje de los alumnos: al analizar profundamente la función tangente llegan a comprenderla mejor.

#### 4ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que ejerciten los conocimientos adquiridos durante esta clase para afianzar los conceptos.

Tiempo empleado: 5 minutos.

Forma de agrupación: Gran grupo.

Material didáctico: Fotocopias.

Desarrollo: El profesor reparte una fotocopia a cada alumno con la siguiente lista de ejercicios que tendrán que traer resueltos para el próximo día.

1º Representa gráficamente, sobre un mismo sistema de ejes coordenados, las funciones  $y = \sin x$  e  $y = \cos x$ , utilizando como conjunto inicial el intervalo  $[-\pi/4, \pi/4]$ .

2º A partir de la gráfica de  $y = \sin x$ , representa sobre el intervalo  $[0, 2\pi]$  las gráficas de las funciones:

a)  $y = -\sin x$ ; b)  $y = |\sin x|$

3º A partir de la gráfica  $y = \tan x$ , representa las de: a)  $\tan(x - \pi/2)$ ; b)  $\tan(x + \pi/2)$

Justificación: Para que ejerciten los conocimientos adquiridos durante esta clase y afiancen los conceptos.

### 7ª CLASE

En esta clase, además de corregirse los ejercicios mandados el día anterior está dedicada a la realización de diversos ejercicios. Van a hacer en clase ejercicios de todos los apartados del tema como punto final de éste.

#### 1ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que comprueben si han realizado bien los ejercicios mandados el día anterior y pregunten las dudas.

Tiempo empleado: 10 minutos.

Forma de agrupación: Gran grupo.

Material didáctico: Pizarra.



Desarrollo: Van saliendo voluntarios a la pizarra para resolver los ejercicios. Los alumnos van planteando sus dudas y el profesor las va respondiendo.

Justificación: Así ven si han hecho bien los ejercicios, y si tienen alguna duda, no se les queda almacenada sino que tienen opción de comentarla y así poder solventarla.

## 2ª ACTIVIDAD

Objetivo: Que hagan un análisis global de tema, haciendo ejercicios diversos.

Tiempo empleado: 50 minutos.

Forma de agrupación: Individual.

Material didáctico: Cuaderno, fotocopias y calculadora.

Desarrollo: El profesor reparte unas fotocopias con una relación de ejercicios que los alumnos tendrán que realizar en clase. Mientras que los alumnos van trabajando el profesor se pasea por la clase y va resolviendo dudas. También pueden preguntarse los alumnos entre ellos y ayudarse a hacer los ejercicios. Si cuando finalice la clase los alumnos no los han terminado, los hacen en clase para poder corregirlos el día siguiente.

La relación de ejercicios es la siguiente:

1º Dados los siguientes ángulos,  $\alpha = 25^\circ 50' 45''$ ;  $\beta = 125^\circ 45' 35''$  y  $\gamma = 85^\circ 30' 30''$ , efectúa las siguientes operaciones con la calculadora: a)  $\alpha + \gamma$ ; b)  $\beta - \alpha$ ; c)  $\alpha + \beta - \gamma$ ; d)  $2\gamma - \beta$

2º Expresa en radianes los ángulos:  $30^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $127^\circ$ ,  $200^\circ$ ,  $300^\circ$ .

3º Expresa en grados y radianes el ángulo que forman el horario y minuterio cuando son las cuatro en punto.

4º De un triángulo rectángulo se sabe que uno de sus ángulos agudos mide  $\pi/4$  radianes, y uno de sus catetos 5 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto, la hipotenusa y el otro ángulo agudo?

5º De la torre de control de aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento, el avión se encuentra a una altura de 120 m y el ángulo de observación es de  $\pi/6$  radianes. ¿A qué distancia está el avión del pie de la torre, si esta mide 40 m de alto?

6º Hemos situado un mástil clavado en el suelo y le hemos colocado un cable tal y como indica la figura siguiente: ¿Cuánto miden el mástil y el cable?



7º Un hombre situado a 7 m de la base de un risco, mide un ángulo de elevación de  $28^\circ$  desde ese punto hasta el extremo del risco. Determina la altura del risco si el ángulo que forma con el suelo es de  $65^\circ$ .

8º Señala el signo del seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:  $-25^\circ$ ;  $147^\circ$ ;  $1237^\circ$ ;  $-3685^\circ$ ;  $-270^\circ$ .

9º Determina las siguientes razones trigonométricas de un ángulo  $\alpha$  sabiendo que:

a)  $\sin \alpha = 0,25$  y  $\alpha$  está en el segundo cuadrante. b)  $\cos \alpha = -2/5$  y  $\alpha$  está en el tercer cuadrante.

10º Determina para que ángulos  $x$ , comprendidos entre 0 y  $2\pi$  rad, se verifica que  $\operatorname{tg} x = 1$ .

Justificación: Al ir haciendo los ejercicios en clase los alumnos le pueden ir preguntando al profesor las dudas.

## 8ª CLASE

Se van a corregir los ejercicios de la fotocopia que se les dio en la clase anterior.

Para concluir, se fijará la fecha del examen de este tema, teniendo en cuenta que en la evaluación influyen:

La nota del examen; La participación y actitud en clase; Las veces que ha salido voluntario a la pizarra.

Con esto se concluye esta unidad. En el resto de clase lo que se hace es una introducción en el siguiente tópico. ●

### Bibliografía

Armendáriz, Juan José. (2004). Ejercicios de matemáticas para la E.S.O. Madrid: Espasa Calpe.

### REFERENCIAS LEGISLATIVAS

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. (BOE 4/5/2006)

Real Decreto 18/2008, de 8 de febrero.